数理解析研究所講究録 1251 巻 2002 年 114-123

Cohomology of infinite Coxeter groups

筑波大学大学院数理物質科学研究科
保坂 哲也 (Tetsuya Hosaka)

§1 序

本研究では，有限生成な無限 Coxeter group の cohomology を調べることを目的としている。Coxeter group は以下のように定義される。

集合 S と写像 $m: S\times S\to \mathbf{N}\cup\{\infty\}$ で次の条件をみたすものを考える。

(1) すべての $s,t\in S$ について $m(s,t)=m(t,s)$,

(2) すべての $s\in S$ について $m(s,s)=1$,

(3) 相異なるすべての $s,t\in S$ について $m(s,t)\geq 2$.

このような S と m によって

$$W=\langle S\,|\,(st)^{m(s,t)}=1 \text{ for } s,t\in S\rangle$$

と表現される群 W を *Coxeter group* とよぶ。そして (W,S) の組みを *Coxeter system* とよぶ。

Coxeter group の歴史は古く，その由来は，鏡映によって生成される有限群 (有限鏡映群) が上記のような表現をもつ有限群として特徴付けられることを H. S. M. Coxeter が証明したことによる。現在では有限無限を問わず，上記のような表現をもつ群は Coxeter group とよばれる。有限な Coxeter group については [B] にみられるように，完全に分類が与えられるなど，ある程度のことがわかっているのだが，無限な場合についてはまだほとんど分かっていない状況にある。本研究では，直接扱うことの難しい無限の Coxeter group に対して，Coxeter system から定義される幾何的な対象を扱うことによって，Coxeter group の cohomology に関する情報を得ることを目的とし

ている。特にここでは，M. W. Davis によって [D3] の中で与えられた 有限生成な無限 Coxeter group の cohomology に関する公式を改良し，Coxeter group の cohomology について考察する。

§2 Coxeter system から定義される空間

群と空間の cohomology に関しては次の同型が知られている。

Proposition 1 ([Br, Proposition VIII.7.5]). Γ を群，X を *free* Γ*-complex* とする。もし X/Γ が *compact* ならば，次の同型が成り立つ:

$$H^*(\Gamma, \mathbf{Z}\Gamma) \cong H_c^*(X),$$

ただし $H_c^*(X)$ は X の *compact support* の *cohomology* である。

Coxeter group W は，常に finite index な torsion-free subgroup Γ を持つことが知られている。以下で，この Γ が free, cocompact に作用する contractible CW complex を定義する。

まず，parabolic subgroup の定義を与える。

Definition. Coxeter system (W, S) と $T \subset S$ に対して，W_T を T によって生成される W の部分群と定義し，*parabolic subgroup* と呼ぶ。

このとき pair (W_T, T) はまた Coxeter system となることが知られている ([B])。もし T が空集合ならば W_T は trivial group である。

次に Coxeter system からある simplicial complex を構成する。

Definition. Coxeter system (W, S) に対して，simplicial complex $L(W, S)$ を次で定義する:

(1) $L(W, S)$ の vertex set を S とする。

(2) S の空でない部分集合 T は，W_T が有限のときに限り $L(W, S)$ の simplex を張るとする。

このとき，S の部分集合 S' について，$L(W_{S'}, S')$ は $L(W,S)$ の subcomplex となっていることに注意する。

Remark. いま (W_1, S_1) と (W_2, S_2) を Coxeter system とする。このとき $(W_1 \times W_2, S_1 \cup S_2)$ と $(W_1 * W_2, S_1 \cup S_2)$ は Coxeter system となる。

実際，各 $i = 1, 2$ について

$$W_i = \langle\, S_i \mid (st)^{m_i(s,t)} = 1 \text{ for } s, t \in S_i \,\rangle$$

と表せているとき，$m, m' : S_1 \cup S_2 \to \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ を

$$m(s,t) := \begin{cases} m_1(s,t) & \text{if } s,t \in S_1 \\ m_2(s,t) & \text{if } s,t \in S_2 \\ 2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$m'(s,t) := \begin{cases} m_1(s,t) & \text{if } s,t \in S_1 \\ m_2(s,t) & \text{if } s,t \in S_2 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義すると

$$W_1 \times W_2 = \langle\, S_1 \cup S_2 \mid (st)^{m(s,t)} = 1 \text{ for } s, t \in S_1 \cup S_2 \,\rangle$$

$$W_1 * W_2 = \langle\, S_1 \cup S_2 \mid (st)^{m'(s,t)} = 1 \text{ for } s, t \in S_1 \cup S_2 \,\rangle$$

と表すことができる。

また, simplicial complex $L(W,S)$ については

$$L(W_1 \times W_2, S_1 \cup S_2) = L(W_1, S_1) * L(W_2, S_2) \quad \text{(simplicial join)}$$

$$L(W_1 * W_2, S_1 \cup S_2) = L(W_1, S_1) \cup L(W_2, S_2) \quad \text{(disjoint union)}$$

が成り立つ。

本稿では，Coxeter system (W,S) について，S **は常に有限集合**であるものとする。

最後に Coxeter system からある contractible space を定義する。

Definition. (W,S) を Coxeter system とする。このとき，**離散位相**を入れた W と $L(W,S)$ の cone $CL(W,S)$ の基底空間 $|CL(W,S)|$ の積 $W \times |CL(W,S)|$ 上の同値関係 $\sim$ を次で定める: $(w_1, x_1), (w_2, x_2) \in W \times |CL(W,S)|$ について

$$(w_1, x_1) \sim (w_2, x_2) \iff x_1 = x_2 \text{ and } w_1^{-1} w_2 \in W_{V(x_1)},$$

ただし $V(x) = \{s \in S \mid x \in \mathrm{St}\,(s, \mathrm{sd}\ L(W,S))\}$. ここで, $\mathrm{St}\,(s, \mathrm{sd}\ L(W,S))$ は $L(W,S)$ の重心細分 $\mathrm{sd}\ L(W,S)$ における s の closed star をあらわす。このとき,

$$\Sigma(W,S) := (W \times |CL(W,S)|)/\sim$$

と定義する。

ここで

$$w \cdot [u,x] = [wu,x]$$

$(w \in W,\ [u,x] \in \Sigma(W,S))$ によって W は $\Sigma(W,S)$ に自然に作用する。

また, $\Sigma(W,S)$ は contractible となり ([D1]), 1-skeleton が W の S に関する Cayley graph となるような CW-complex とみなすことができる ([D2]) ことが知られている。

Coxeter group W の finite index な torsion-free subgroup Γ は, $\Sigma(W,S)$ に free, cocompact に作用する。よって Proposition 1 より

$$H^*(\Gamma, \mathbf{Z}\Gamma) \cong H_c^*(\Sigma(W,S))$$

が成り立つ。実際は更に

$$H^*(W, \mathbf{Z}W) \cong H^*(\Gamma, \mathbf{Z}\Gamma) \cong H_c^*(\Sigma(W,S))$$

が成り立つことが知られている ([D3])。

§3 Davis の定理

M. W. Davis によって与えられた Coxeter group W の cohomology $H^*(W, \mathbf{Z}W)$ の公式を紹介する。

まず, いくつか定義を与える。

Definition. Coxeter system (W,S) について

$$\mathcal{S}^f(W,S) := \{T \subset S \mid W_T \text{ is finite}\}$$

と定める。ここで, 空集合は常に $\mathcal{S}^f(W,S)$ に属することに注意する。

Definition. (W, S) を Coxeter system とする。
各 $w \in W$ について

$$S(w) := \{s \in S \mid \ell(ws) < \ell(w)\}$$

と定める。ただし $\ell(w)$ は w の S に関する length である。
更に，各 $T \subset S$ に対して

$$W^T := \{w \in W \mid S(w) = T\}$$

と定める。

Davis は $H_c^*(\Sigma(W, S))$ を調べることにより，次の定理を証明した。

Theorem 2 (Davis [D3]). Coxeter system (W, S) に対して次の同型が成り立つ:

$$H^*(W, \mathbf{Z}W) \cong \bigoplus_{T \in \mathcal{S}^f(W,S)} \left(\mathbf{Z}(W^T) \otimes \tilde{H}^{*-1}(L(W_{S \setminus T}, S \setminus T))\right),$$

ただし $\mathbf{Z}(W^T)$ は *free abelian group on* W^T を表し，$\tilde{H}^*$ は *reduced cohomology* を表す。

この公式からわかるように，$H^i(W, \mathbf{Z}W)$ が (アーベル群として) 無限生成となる必要十分条件は，ある $T \in \mathcal{S}^f(W, S)$ で，W^T が無限集合となり，$\tilde{H}^{i-1}(L(W_{S \setminus T}, S \setminus T)) \neq 0$ となるものが存在することである。
このように，W^T の元の個数は，$H^i(W, \mathbf{Z}W)$ が有限生成となるか無限生成となるかに関わる係数であるのだが，定義からもわかるように，実際に直接求めることは困難である。次の section では，$\tilde{H}^*(L(W_{S \setminus T}, S \setminus T))$ が自明でない場合に W^T の元の個数がどのようになるのかを調べ，上で述べた Davis の定理をより単純にすることを考える。

§4 W^T について

まず補題を用意する。

Lemma 3 (cf. [D3, Lemma 1.10]). (W,S) を *Coxeter system*, $T \in \mathcal{S}^f(W,S)$ とする。このとき，次は同値:

(1) W^T は一点集合

(2) $W = W_{S\setminus T} \times W_T$

(3) 各 $s \in S \setminus T$, $t \in T$ に対して $st = ts$.

群の cohomology に関して，次の F. T. Farrell の結果がある。

Theorem 4 (Farrell [F]**).** Γ を *type FP* の *finitely presented* な群とし，

$$n = \min\{i \mid H^i(\Gamma, \mathbf{Z}\Gamma) \neq 0\}$$

とする。このとき $H^n(\Gamma, \mathbf{Z}\Gamma)$ が有限生成なアーベル群ならば，Γ は *n-dimensional Poincaré duality group* となる。すなわち

$$H^i(\Gamma, \mathbf{Z}\Gamma) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & i = n \\ 0, & i \neq n \end{cases}$$

をみたす。

W^T の元の個数 $|W^T|$ に関して次の補題を示すことに成功した。

Lemma 5. (W,S) を *Coxeter system*, $T \in \mathcal{S}^f(W,S)$ とする。もし $2 \leq |W^T| < \infty$ ならば，$L(W_{S\setminus T}, S \setminus T)$ は *contractible* となる。

Idea. $2 \leq |W^T| < \infty$ と仮定すると，Lemma 3 より，$s_0 \in S \setminus T$, $t_0 \in T$ で $m(s_0, t_0) \neq 2$ となるものが存在する。このとき，Theorem 4 を用いて

$$L(W_{S\setminus T}, S \setminus T) = s_0 * L(W_{S\setminus(\{s_0\}\cup T)}, S \setminus (\{s_0\} \cup T))$$

を示すことによりこの補題を証明した。

Definition. $W = W_T \times W_{S\setminus T}$ と分解しないとき，Coxeter system (W,S) は *irreducible* であるという。

いま Coxeter 系 (W,S) に対して一意的に定まる S の部分集合 $\tilde{S}$ の定義を

Definition. Coxeter system (W,S) に対して，まず既約分解

$$W = W_{S_1} \times \ldots \times W_{S_r}$$

を考え (すなわち各 (W_{S_i}, S_i) は irreducible),

$$\tilde{S} := \bigcup \{S_i \mid W_{S_i} \text{ is infinite}\}$$

と定義する。

ここで，定義から

$$W = W_{\tilde{S}} \times W_{S \setminus \tilde{S}}$$

が成り立ち，$S \setminus \tilde{S} \in \mathcal{S}^f(W,S)$ となることに注意する。

Lemma 5 から更に議論を重ねることにより，$|W^T|$ に関して次の補題を得ることができる。

Lemma 6. (W,S) を *Coxeter system,* $T \in \mathcal{S}^f(W,S)$ とする。もし $L(W_{S\setminus T}, S \setminus T)$ が *contractible* でないならば,

$$|W^T| = \begin{cases} 1, & \text{if } T = S \setminus \tilde{S} \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。

§5 Coxeter group の cohomology について

Lemma 6 を用いることにより，Theorem 2 は次のように書き換えることができる。

Theorem 7. (W,S) を *Coxeter system* とするとき，次の同型が成り立つ:

$$H^*(W, \mathbf{Z}W) \cong \tilde{H}^{*-1}(L(W_{\tilde{S}}, \tilde{S})) \oplus \left(\bigoplus_{S\setminus\tilde{S} \neq T \in \mathcal{S}^f(W,S)} \bigoplus_{\mathbf{Z}} \tilde{H}^{*-1}(L(W_{S\setminus T}, S\setminus T)) \right).$$

この Theorem 7 により，次の系を得ることができる。

Corollary 8. Coxeter system (W, S) に対して，次は同値:

(1) $H^i(W, \mathbf{Z}W)$ は有限生成

(2) $H^i(W, \mathbf{Z}W) \cong \tilde{H}^{i-1}(L(W_{\tilde{S}}, \tilde{S}))$

(3) 各 $T \in \mathcal{S}^f(W, S) \setminus \{S \setminus \tilde{S}\}$ について $\tilde{H}^{i-1}(L(W_{S\setminus T}, S \setminus T)) = 0$.

Corollary 9. *Coxeter systems* (W_1, S_1), (W_2, S_2) に対して，もし W_1 と W_2 が自明でないならば, $n \geq 2$ について

$$H^n(W_1 * W_2, \mathbf{Z}(W_1 * W_2)) \cong \bigoplus_{\mathbf{Z}} \Big(H^n(W_1, \mathbf{Z}W_1) \oplus H^n(W_2, \mathbf{Z}W_2) \Big)$$

が成り立ち，また $n = 1$ については

$$H^1(W_1 * W_2, \mathbf{Z}(W_1 * W_2)) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \textit{if } W_1 * W_2 \cong \mathbf{Z}_2 * \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \cdots, & \textit{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。

Proof. まず $n \geq 2$ の場合を考える。いま $(W_1 * W_2, S_1 \cup S_2)$ は irreducible なので，$S := S_1 \cup S_2$ とすると

$$\tilde{S} = S_1 \cup S_2$$

である。また,

$$L(W_1 * W_2, S_1 \cup S_2) = L(W_1, S_1) \cup L(W_2, S_2)$$

より,

$$\tilde{H}^{n-1}(L(W_1 * W_2, S_1 \cup S_2)) \cong \tilde{H}^{n-1}(L(W_1, S_1)) \oplus \tilde{H}^{n-1}(L(W_2, S_2))$$

が成り立つ。同様に,

$$\mathcal{S}^f(W_1 * W_2, S_1 \cup S_2) = \mathcal{S}^f(W_1, S_1) \cup \mathcal{S}^f(W_2, S_2)$$

より，各 $T \in \mathcal{S}^f(W_1 * W_2, S_1 \cup S_2)$ について

$$\begin{aligned} &\tilde{H}^{n-1}(L(W_1 * W_2, S_1 \cup S_2)) \\ &\cong \begin{cases} \tilde{H}^{n-1}(L((W_1)_{S_1\setminus T}, S_1 \setminus T)) \oplus \tilde{H}^{n-1}(L(W_2, S_2)), & \text{if } T \in \mathcal{S}^f(W_1, S_1) \\ \tilde{H}^{n-1}(L(W_1, S_1)) \oplus \tilde{H}^{n-1}(L((W_2)_{S_2\setminus T}, S_2 \setminus T)), & \text{if } T \in \mathcal{S}^f(W_2, S_2) \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。以上のことから，Theorem 7 を適用することにより以下の同型を得る:

$$
\begin{aligned}
&H^n(W_1 * W_2, \mathbf{Z}(W_1 * W_2)) \\
&\quad \cong \tilde{H}^{n-1}(L(W_1, S_1)) \oplus \tilde{H}^{n-1}(L(W_2, S_2)) \\
&\qquad \oplus \Bigg(\bigoplus_{\emptyset \neq T_1 \in \mathcal{S}^f(W_1, S_1)} \bigoplus_{\mathbf{Z}} \Big(\tilde{H}^{n-1}(L((W_1)_{S_1 \setminus T_1}, S_1 \setminus T_1)) \oplus \tilde{H}^{n-1}(L(W_2, S_2)) \Big) \Bigg) \\
&\qquad \oplus \Bigg(\bigoplus_{\emptyset \neq T_2 \in \mathcal{S}^f(W_2, S_2)} \bigoplus_{\mathbf{Z}} \Big(\tilde{H}^{n-1}(L(W_1, S_1)) \oplus \tilde{H}^{n-1}(L((W_2)_{S_2 \setminus T_2}, S_2 \setminus T_2)) \Big) \Bigg) \\
&\quad \cong \bigoplus_{\mathbf{Z}} \Bigg(\bigoplus_{T_1 \in \mathcal{S}^f(W_1, S_1)} \tilde{H}^{n-1}(L((W_1)_{S_1 \setminus T_1}, S_1 \setminus T_1)) \\
&\qquad\qquad \oplus \bigoplus_{T_2 \in \mathcal{S}^f(W_2, S_2)} \tilde{H}^{n-1}(L((W_2)_{S_2 \setminus T_2}, S_2 \setminus T_2)) \Bigg) \\
&\quad \cong \bigoplus_{\mathbf{Z}} \Big(H^n(W_1, \mathbf{Z}W_1) \otimes H^n(W_2, \mathbf{Z}W_2) \Big).
\end{aligned}
$$

最後に $n = 1$ の場合を考える。いま $\tilde{H}^*$ は reduced cohomology なので，

$$
\begin{aligned}
\tilde{H}^0(L(W_1 * W_2, S_1 \cup S_2)) \oplus \mathbf{Z} &\cong H^0(L(W_1 * W_2, S_1 \cup S_2)) \\
&\cong H^0(L(W_1, S_1)) \oplus H^0(L(W_2, S_2)) \\
&\cong \tilde{H}^0(L(W_1, S_1)) \oplus \tilde{H}^0(L(W_2, S_2)) \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}
\end{aligned}
$$

となる。このことを踏まえて $n \geq 2$ の場合と同様の議論を行うことにより

$$
H^1(W_1 * W_2, \mathbf{Z}(W_1 * W_2)) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{if } W_1 * W_2 \cong \mathbf{Z}_2 * \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \cdots, & \text{otherwise} \end{cases}
$$

を得る。∎

References

[B] N. Bourbaki, *Groupes et Algebrès de Lie*, Chapters IV-VI, Masson, Paris, 1981.

[Br] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

[D1] M. W. Davis, *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Ann. of Math. **117** (1983), 293–324.

[D2] M. W. Davis, *Nonpositive curvature and reflection groups*, Handbook of Geometric Topology, Elsevier, to appear.

[D3] M. W. Davis, *The cohomology of a Coxeter group with group ring coefficients*, Duke Math. J. **91 (no.2)** (1998), 297–314.

[Dr] A. N. Dranishnikov, *On the virtual cohomological dimensions of Coxeter groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **125 (no.7)** (1997), 1885–1891.

[F] F. T. Farrell, *Poincaré duality and groups of type (FP)*, Comment. Math. Helv. **50** (1975), 187–195.

[H] T. Hosaka, *On the cohomology of Coxeter groups*, J. Pure Appl. Algebra **162** (2001), 291–301.

[Hu] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, 1990.

[M] G. Moussong, *Hyperbolic Coxeter groups*, Ph.D. thesis, The Ohio State University, 1988.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF TSUKUBA, TSUKUBA-SHI, IBARAKI, 305-8571, JAPAN

E-mail address: thosaka@math.tsukuba.ac.jp